数理解析研究所講究録 1206 巻 2001 年 1-31

Élie Cartan の業績
– S.S. Chern と C. Chevalley による解説 –

上智大学　　宮岡礼子 (Reiko Miyaoka)
Sophia University

Élie Cartan 没後 50 周年に開かれた本研究会のサブテーマである Élie Cartan の業績を，S.S. Chern と C. Chevalley 著 “Élie Cartan and his mathematical work” (Bulletin of the American Mathematical Society **58** (1952), 217–250) によりふりかえることにする．Élie Cartan の業績についての文献はたくさんあるし，このように半世紀も経た著述よりは，今風の説明の仕方の方がずっとわかりやすいところもある．しかし，読んでみて，Élie Cartan の偉大さを再認識することになった． Cartan の論文が必ずしも読みやすくはないということや，新しい概念が定着する以前にかかれたものであることを考えると，S.S. Chern と C. Chevalley によるこの解説は大変ありがたいものであり，今なお読む価値はあったと思う．長野正先生，Martin Guest 氏には数学及び英語に関する質問にていねいに答えていただき，大変感謝している．ただ訳者の思い込みで書いている部分には不十分な点も多いと思う．原典にあたっていただきたい．また Élie Cartan 後の数学の進展について注を入れる能力もないので，この点では各専門の方々の書かれる本講究録の他の論文等を参照していただければ幸いである．

1 “Élie Cartan とその数学の業績” S.S. Chern & C. Chevalley

長い病気の後，エリーカルタンは 1951 年 5 月 6 日，パリで亡くなった。その死は彼の名声と，彼の思想の影響がまさに高まりつつある中で訪れた。疑いなく，彼は今世紀の最も偉大な数学者の 1 人であるが，彼の生涯は稀に見る天賦の才と慎み深さとの調和によって特徴づけられている。

エリーカルタンは 1869 年 4 月 9 日に南フランスの村 Dolomieu (Isère) で生まれた．彼の父親は鍛冶屋であった．カルタンの初等教育は，才能ある子供のための州の奨学金によって可能になった．1888 年，彼は “École Normale Supérieure” に入学し，そこで Tannery, Picard, Darboux, Hermite といった巨匠から高等数学を学んだ．彼の研究は，ライプツィヒの Sophus Lie の下で学んできたばかりの学生仲間 Tresse に勧められたテーマ，連続群についての有名な学位論文で始まった．最初の教職はモンペリエの助教授であった．引き続いてリヨン，ナンシーへ，そして最後に 1909 年パリへ移り，1912 年にソルボンヌの教授となった．この出世のもととなった業績報告書はポアンカレによって書かれたのだが，この事情は彼がずっと心から誇りに思っていたことのひとつである．彼は 1940 年に退職するまでずっとソルボンヌにとどまった．

カルタンは素晴らしい教師だった．講義では知的体験を十分に与えたため，学生たちはその主題の全てを理解したと，一般には勘違いをした．だから長い間彼が若い数学者たちに，当然値する影響力を及ぼさなかったのは，驚くべきことである．この原因の 1 つはおそらくカルタンの極端な慎み深さにある．ポアンカレと違って，彼は学生たちを彼の指示通りに勉強させることを避けるということはなかった．しかしながら自分の周囲に熱狂的信者を集め，数学の一派をなすには，彼はユーモアのセンスを持ちすぎていた．一方，今世紀の始めにフランスで達成された数学の研究は，解析関数論に集中していた．このテーマは Picard の定理に代表される成果によって魅力に満ちたものとなり，若い数学者が取り組むのに難しすぎない多くの問題を提供した．経験の少ない数学の初心者たちには，カルタンの教えは特に幾何学において，Darboux のうつろな幾何学のエレガンスの残り物だと，大変間違って解釈された．A.Weil の大いなる影響下に，外の新鮮な空気がフランスの数学界に吹いてきた時には，当時超現代的な分野だったトポロジーや現代代数学に全精力を注ぐという大きな誘惑があった．カルタンの思想はまたしても，以前とは違う理由により，当然受けるべき

多くの注目を集めることができなかった．この悔やむべき状況は，1936 年にカルタンの仕事が（A.Weil の示唆により）Juria セミナーの中心テーマに取り上げられて少々改善された．1939 年カルタンの数学研究 50 周年祝賀会の席で J.Dieudonne は彼に “Vous etes un“jeune”, et vous comprenez les jeunes” (あなたは若者であり，若者を理解できる）と的を得たことをいった．その時まさに若者たちはカルタンを理解し始めたのだった．

外国，特にドイツでは彼の偉大な数学者としての評判はより早く訪れた．カルタンの評判を他の分野の数学者の間に広めたのは，おそらく 1925 年ごろ出版された H.Weyl の群表現についての基本的な論文である．また，抽象代数の進歩は，リー代数に関する彼の仕事に注意を喚起する助けとなった．しかし彼の微分幾何への貢献に対する受け取られ方は様々だった．この原因は，１つには問題の核心には迫っているが，慣習に従っていない彼のアプローチの仕方，もう１つには説明の不十分さによる．こういうわけで Weyl は 1938 年に書かれたカルタンの本の批評の中で “カルタンは間違いなく最も偉大な現存の微分幾何学者である．... そして私はこの本を，ほとんどのカルタンの論文と同様に，読みにくいと思ったことを認めざるを得ない．”と述べている．これは多くの幾何学者にとっても同様であった．

カルタンは 1931 年にフランスアカデミー会員に選ばれた．その後の人生でも彼はいくつかの栄誉を受けた． 米国学士院と王立協会の外国人会員となり，1936 年にはハーバード大学から名誉学位を与えられた．

科学者と教師としてのカルタンの人生には，彼の家庭生活が密に織りこまれてる．家族との生活は幸せで平穏なものだった．彼には 4 人の子供，つまり Henri, Jean, Louis という 3 人の息子と，Hélène という 1 人の娘がいた．Jean は音楽に自分の将来を見定めており，無惨にも亡くなった時には既にその世代の中で最も優れた作曲家として頭角を表しはじめていた．Louis は物理学者で，レジスタンスが始まった頃にドイツ人に捕らえられ，長い拘留のあとに殺害された．言うまでもなく Henri は父のあとを継いで数学者になった．

カルタンの数学の仕事は大きく三つの主題に分けられる．群論，微分方程式系，幾何学である．しかしながらこれらのテーマは常に入り組んでおり，また多かれ少なかれリー群論に関係している．

S.Lie は彼にちなんで名付けられた群を変換群として導入した．つまり n 変数の解析的変換系であり，この系の任意の二つの変換の積もやはりこの系に属し，この系のどの変換も同じ系の中で逆変換を持つというもの

である．与えられた変換群の下部構造としての抽象群を考えるというアイディアは後になってから現れたのだが，それは多少とも Killing の仕事にそれとなく表現されており，カルタンの最初の論文では既にはっきりと現れている．Lie にとって分類問題とは，与えられた個数の変数に対する全ての可能な変換群を見つけることであり，これは変数の数が非常に小さくない限り，数学の当時の段階では難しすぎる問題であった．一方カルタンと Killing にとっては，問題は全ての可能な連続群の抽象構造を見つけることだった．そして共同の努力はその問題を単純群について完全に解決した．ひとたび全ての単純群の構造が分かれば，これらのどの構造に対しても，あらゆる可能な実現を特定の性質を持つ変換により探すことができる．特に線形変換群としての実現が求まる．これが与えられた群についての表現の決定問題であるが，カルタンにより単純群については完全に解決された．この解答は，1913 年という早い時期のスピノールの発見につながったが，これは後に物理学者によって特別な場合について再発見されることになった．

カルタンはまた，無限リー群，すなわちその作用が有限個の連続変数ではなく，勝手な関数に依存しているものについても考察した．この場合，下部構造としての抽象群の概念はない．カルタンと Vessiot はほとんど同時期に全く独立に, どんな時に二つの無限リー群が同型と考えられるかを定義する時に現れる，抽象群の概念に代わるものを見つけた．引き続いてカルタンは同型でない無限リー群 の全ての可能なタイプを分類した．

カルタンはまた群の大域的位相構造の研究にも大きな注意をはらっていた．彼はこのトポロジーの問題のいくつが，純粋に代数的な問題に還元できるかを明らかにした．そうすることで彼は，その群の多くの大域的性質が，群の無限小構造から読みとれる，つまりその群の幾らでも小さな断片が与えられた時に，その群の性質はすでに決定されているという注目すべき事実を発見した．彼のこの筋の仕事は，いくつかの小さな骨の特徴から有史以前の動物の形を再現する古生物学者の仕事に似ている．

始めに見えている解析の衣の下に隠れている数学的対象の抽象構造を研究する，という思想はまた，微分式系のカルタン理論の原動力であった．彼は変数の勝手な変換のもとで不変である微分方程式の理論があることを主張した．このようにすることによってのみ，対象が満たす微分方程式を用いてその研究対象の特性を明らかにできる．数や数の集合による対象の具体的表示に依存する方法とは違ってである．この不変理論を作り上げるために，カルタンは外微分形式の概念の統一的利用を行った．これは，任

意の変数変換に関して不変である，という求められる性質をちょうどもち，カルタンの助けを借りてできた概念である．

フランスの幾何の伝統の中で育ったカルタンは，常に微分幾何に関心を抱いていた．彼は非凡にも，リー群の膨大な知識と，その不変な特質が幾何学的考察に特に適している微分式系の理論の知識，そして最も重要なこと，つまりおどろくべき幾何学的直感を合わせ持っていた．その結果，彼は非常に複雑な計算の中にある幾何学的内容を見ることができ，幾何学的議論をいくつかの計算に代用することも出来た．これはしばしば彼の読者を困惑させた．しかしこの技術があることは，幾何学的にものを考える者の強みである．

1920 年代に一般相対性理論は微分幾何に新しい刺激を与えた．これによって，適当な局所構造をもつ空間の熱狂的研究がおこった．この適当な局所構造の最も注目すべき例がリーマン計量である．これはいろいろに一般化されている．例えば，リーマン幾何の弧長をきめる積分を変型したフィンスラー幾何，測地線や道に関連した性質だけの研究（道の幾何学, Eisenhart, Veblen と T.Y. Thomas)，基本形式が共通因子の違いだけをもつリーマン計量の族の性質の研究（共形幾何）などである．これら全てにおいての主要な関心事は平行移動の決定であったが，カルタンのこの問題に対するアプローチは最もオリジナルで満足の行くものだった．またしても群の概念が中心的役割を果たした．おおざっぱにいうと，カルタンの意味する一般化された空間というのは，“接空間”のことで，非常に近い二つの接空間は，与えられたリー群の無限小変換によって関係づけられている．そのような構造は接続として知られている．接空間は接ベクトルの空間ではなくてもよい．絶対に必要なこの一般化が，微分幾何学者たちの間に間違った解釈を広めた．後に述べるように，この概念は現代のファイバー束の概念を用いることによって，今ならより満足のいく方法で説明することができる．

我々は上の短い記述からカルタンの数学の仕事は，ポアンカレやアダマールとは違って２，３の主要な概念のまわりに集中していると思うだろう．これは一つには，彼のパイオニア的な仕事によって，さらなる発展が疑いなく可能であるような道が切り開かれた分野の豊かさのためである．カルタンの考えの多くが近年解明されてきた一方で，発展の最初の段階で正確な概念を思いつくことの難しさは大きく評価されないできた．そのため数学的思考の心理学について執筆する中でアダマールは“リー群の初歩的で表面的な知識以上の物をマスターすることの克服し難い困難さ”を認

めなければならなかった．現代数学の発展のおかげで，そのような困難は今や軽減された．

いくつかの本の他にカルタンは約 200 の数学の論文を出版した．近い将来に彼の全集の出版が熱心に望まれている．それらは，過去の偉大な数学者の本に並んで，我々の書斎の本棚に並ぶ価値があるだけでなく，今後の長い間，同じ方面の仕事をしようとする人全てにとって欠くことのできない道具になるだろう．

さて，引き続いてカルタンの数学的貢献の中で最も重要なもののうちのいくつかについてもっと詳しい紹介をしていくことにする．

I. 群論

カルタンの群論についての論文は扱われている問題の性質と，書かれた時期によって 2 つのカテゴリーにわけられる．前期に書かれたものは純粋に代数的な性質を持ち，それらは厳密な意味での群論というより，むしろ現在でいうリー代数に関係している．カルタンは彼の学位論文 [3] で複素数体上の全ての単純リー群の完全な分類を与えている．それらは 4 つの一般類（ユニモデュラー群, 偶数及び奇数次の直交群, シンプレクティック群のリー代数）と，14，52，78，133，248 次元の 5 つの “例外的” な代数系に分けられる．Killing はすでに 4 つの一般類のほかにはこれらの 5 つの例外的なリー代数しか存在し得ないことを発見していたが，彼の証明はいくつかの重要な点で正しくなかったし，5 つの例外的なリー代数については，論文でそれらが本当に存在することを証明したのかどうかは明らかでない．その上彼の仕事では 52 次元のリー代数は二つの形で現れており，その同等性を彼は認識していなかった．カルタンは 4 つの一般類 (古典型) と 5 つの例外型への分類が完全であるということを厳密に証明し，例外代数をきちんと構成した．

$\mathfrak{g}$ を任意のリー代数とする．$\mathfrak{g}$ の各元 X に附随する線形変換として，$\mathfrak{g}$ に作用する X の随伴変換 $\mathrm{ad}\, X$ があり，これは $\mathfrak{g}$ の任意の元 Y を $[X,Y]$ に変換する．$[X,X]=0$ の関係からこの線形変換は常に 0 を特性根とする．0 が最小重複度の $\mathrm{ad}\, X$ の特性根になるような $\mathfrak{g}$ の元 X は正則元とよばれる．H を正則元とする．$\mathrm{ad}\, H$ の冪によって 0 にうつされるような $\mathfrak{g}$ の元は $\mathfrak{g}$ のある部分代数 $\mathfrak{h}$ をつくる．そしてこの部分代数 はいつも冪零である（つまりそのような代数の随伴表現で，どの元も唯一の特性根として 0 を持つ）．$\mathfrak{h}$ のような部分代数は $\mathfrak{g}$ のカルタン代数とよばれている．それはリー代数 $\mathfrak{g}$ の内部核ともいうべきもので，大きい代数 $\mathfrak{g}$ の性質の多くがこの部分代数 $\mathfrak{h}$ の性質から反映される．$\mathfrak{g}$ が半単純である

ような場合は $\mathfrak{h}$ はいつも可換である（可換なリー代数とはそのリー代数の任意の X と Y について $[X,Y]=0$ となるもの）．その上，$\mathfrak{g}$ は全ての $\mathfrak{h}$ の元の随伴作用についての同時固有ベクトルからなる基底を持つ．$\mathfrak{h}$ の元とのブラケットをとる時，これらの元に掛けられる因子はリー代数のルートとよばれる．単純リー代数の分類を導いたのはこれらのルートの性質の研究である．これらの性質を定めるにあたってカルタンは，X における値が ad X の二乗のトレースになるような $\mathfrak{g}$ の "基本 2 次形式"[1]を系統的に利用した（もし，$\mathfrak{g}$ が半単純であったり，もっと一般的に，それがその導来代数と一致するなら，ad X のトレース自体が常に 0 になる）．カルタンの学位論文の最も重要な結果の 1 つは，$\mathfrak{g}$ が半単純であるための必要十分条件は，その基本 2 次形式が非退化である（つまりそのランクが $\mathfrak{g}$ の次元と等しい）ということである．ついでカルタンは似た方法を超複素数体 ([4] 参照) にも応用し，このような方法で実，および複素数体上の結合的代数についての主要な構造定理を得た．しかしこの結果は任意の基礎体上の代数に応用される Wedderburn の仕事によって地位を奪われた．ただ 1 つの整（今でいう可解）イデアルを持つ代数を研究をすることによって，カルタンは学位論文で，単純リー代数の線形表現のその後の研究の基礎も作った．特に彼は各々の型の単純群について可能な最小次数の線形表現を決定した．

線形表現の一般論は [5] にあるものである．上のように $\mathfrak{g}$ を複素数体上の（任意の標数 0 の代数的閉体でも同じ）任意の半単純リー代数とする．$\mathfrak{g}$ の線形表現は $\mathfrak{g}$ の各 X に対して，有限次元空間上の線形変換 $\rho(X)$ を与える法則である．$\rho(X)$ は X について線形で，$\mathfrak{g}$ の全ての X と Y について　$\rho([X,Y])=\rho(X)\rho(Y)-\rho(Y)\rho(X)$ となるようなものである．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数とする．すると $\mathfrak{h}$ の元を表現する行列がすべて同時に対角化できる．この行列の対角成分は，表現される元の線形関数と考えられ，表現のウェイトと呼ばれる．$\mathfrak{g}$ のルートは特別な線形表現（すなわち随伴表現）のウェイトである．カルタンは 1 つまたはいくつかの表現のウェイトの間の全ての関係は，これらのウェイトの間の有理係数のある線形関係の結果であるという，現在では二つの方法で説明できる事実を証明した．それはコンパクトアーベル群の指標の性質と，線形変換の代数群の性質も反映している．それから全てのウェイトとルート系に順序関係を導入し，任意の既約表現が，この順序による最高ウェイトによって一意的に決定されることを証明した．したがって $\mathfrak{g}$ の全ての線形既約表現を

[1]Killing 形式

見つける問題は，表現の全ての可能な最高ウェイトを見付けるという問題に還元できる．二つの既約表現の最高ウェイトの和は，テンソル積（もしくは群についてでなくリー代数についていうならむしろ和）における既約表現の最高ウェイトになる．r をリー代数のランク（つまり $\mathfrak{g}$ の任意のカルタン部分代数の次元）とすると，カルタンは既約表現の全ての可能な最高ウェイトは，$\mathfrak{g}$ の構造とそのルート系の順序だけによる r 個の特別な線形関数の非負整係数線形結合として表せるということ示した．単純リー代数の各々の型をひとつずつ考えることで，彼はこれらの r 個の基礎関数は全てある既約表現の最高ウェイトであるということを示した．このことは単純リー代数の全ての既約線形表現の完全な分類につながった．この線形表現の理論は後に H.Weyl によって重要な点が完成された．つまり半単純リー代数の全ての表現は完全可約であるということが超越的な方法で示され，既約表現の次数は最高ウェイトで表された．カルタンの理論によって予想された可能な最高ウェイトに対応する既約表現の存在の直接的な証明，つまり単純だけでなく半単純代数（単純でない代数であっても忠実既約表現を持ち得るという点において，リー代数は結合的代数とは異なった振舞いをする．これは例えば４次の直交群のリー代数について起こる）にも応用できる証明を与えることが最近可能になった[2]．全ての可能な既約表現を分類する過程で，カルタンは後に物理で非常に重要な役割を果たすことになる直交リー代数のスピン表現を発見した．後に出版された本（Leçons sur la théorie des spineurs, Hermann, Paris, 1938) でカルタンは幾何学的な視点からスピノールの理論を発展させている．

[6] でカルタンは複素数のかわりに実数体上の全ての単純リー代数を分類している．その方法は，考えているリー代数の複素化を調べるというものである．この複素化は単純であるか，二つの単純リー代数の和であり，与えられた実単純リー代数の元を固定元とする複素共役作用が定義される．適当な複素代数から出発して，カルタンは可能なあらゆる共役作用を決定し，この方法で実単純リー代数の完全な分類に到達した（この方法は後に彼自身や他の人によって，コンパクト実型を使い，すべての可能な共役作用の決定を，コンパクト型の全ての対合的自己同型類の決定に置き換えることで単純化された）．

１つの例外を除いて，単純リー代数の構造はその複素化とその指標，つまりその基本２次形式の符号数によって特徴付けらることが明らかになった．カルタンは全ての複素型について，その基本２次形式が負定値であ

[2]Harish-Chandra

るような，ただ1つの実型があることに気づいた．この実型がコンパクトリー群のリー代数である．この事実は，半単純連結複素リー群とコンパクト半単純リー群のあいだの一対一の対応を確立し，後のリー群論で非常に重要な役割を果たすことになった．前者は基礎体が代数的に閉じているために代数的研究に適している一方，後者は群全体の体積（Haar measure の意味での）が有限であるため，超越的方法による研究がより簡単にできる．

前期の最後の論文は [7] で，カルタンは単純実リー代数の全ての実線形表現を決定している．

カルタンの群論に関する後期の仕事は群のリー代数ではなく，群自身，それも概して群の大域的側面に関係している．これは，局所微分幾何的な視点からの群多様体の研究を含む [8] の論文で始まる．群 G はその中で3つの異なる方法，つまり左変換，右変換，変換（ここで言う変換は s を群の固定した元として $t \to sts^{-1}$ なる写像）によって作用する．これに関してカルタンは G において内在的に決定される三つのアフィン接続があることを明らかにした．これらの接続のうちの二つ（左と右変換に対応する）は曲率は持たないが，一般にトージョンを持つ．三つめはトージョンは持たないが一般に曲率を持つ．測地線は三つ全ての接続について同じである．それらは1径数群に関するコセットである．カルタンは G における全測地的ヴァラエティ（それに接する任意の測地線が完全にその中に含まれるようなヴァラエティ）をも決定した．それらは異なる二種からなる．一つめは G の部分群とそのコセットである．二つめは G のリー部分代数 $\mathfrak{g}$ に含まれるリー トリプル システムと呼ばれるもの，つまり X, Y, Z の三つの元とともに元 $[[X, Y], Z]$ を含むような $\mathfrak{g}$ の線形部分空間によって決定される．

この論文のあと，カルタンの興味はかなり明確にリー群の大域的位相に向けられた．

その時期は 1925 年ごろ始まり，そのころ H.Weyl はちょうどコンパクトリー群についての基本的な論文を出版したばかりだった．カルタンがどれ程 Weyl の方法と結果に影響を受けたかということをはかるのは難しい．ともあれ彼の本，Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann から，Weyl の論文以前からカルタンが既に位相の問題への興味をどんどん深めていたことがわかる．Weyl の挑戦の筋が言うなれば野蛮なほど大域的であり，群全体の上での積分に本質的に依存しているのに対し，カルタンの仕事は局所と大域との関係を強調している．この本質的な違いは，これら二つの方法からもたらされる結果の性質に大きく関係する．Weyl の方法

は考えている群の微分構造に縛られない．任意の局所コンパクト群上での積分可能性が保証されるやいなや，Weyl の結果は全てのコンパクト位相群に拡張できる．しかしコンパクトの仮定は本質的で（これはその群上の積分の収束を保証する），Weyl の方法はノンコンパクト群には何ももたらさない．一方カルタンの方法はリー群の領域上にも適用することができ，コンパクトであろうがなかろうが，これらの群の位相のより完全な理解を導いた．

論文 [9] でカルタンはコンパクト半単純リー群の位相と複素化について研究している．G をコンパクト半単純リー群とし，$\mathfrak{g}$ を G のリー代数，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数とする．カルタンは G の全ての元が（少なくとも）1 径数部分群に属し，全ての無限小変換は随伴群の作用によって $\mathfrak{h}$ の元に変換され得ることを示した．$\mathfrak{h}$ の全ての元 H は決まった径数を持つ 1 径数部分群を生じる．この部分群の径数 1 の点を $\exp H$ で表すことにする．すると G の全ての元はある $\exp H$ の形の元と共役になる．次の問題はどんな条件下で，この形の $\exp H$ と $\exp H'$ がお互いに共役かを知ることである．カルタンはこれが起こる必要十分条件が，H' が，空間 $\mathfrak{h}$ に働くある不連続群 S の作用によって H に変換できること，であることを示した．この群は頂点が有限個の多面体 P である基本領域を有する．適当な面の同一視をおこなうと， P の点は G の共役類と一対一で対応する．P の内点は群の正則元，つまり，H が $\mathfrak{h}$ の正則元であるときに $\exp H$ の形で表されるものに対応する．その結果特異点（つまり正則でない）集合にぶつからない G の任意の閉曲線は P の連続曲線（必ずしも閉じていない）によって表される．さて，G の特異元は群の次元より少なくとも 3 次元低い次元の集合を形成することが分かる．その結果，それらは基本群の決定において完全に無視できる．これによって多面体 P 自身を考えることだけで，この基本群 π の決定に進むことができる．π の位数は，$\exp H$ が G の単位元となる P の頂点 H の数である．これから Weyl のコンパクト半単純リー群の基本群が有限であるという定理が得られる．これは，もしリー群 G の基本 2 次形式が負定値だったら，G と局所同型であるようなコンパクト群が少なくともひとつ存在するということだけでなく，G 自身がコンパクトであるということを導く．その上カルタンの方法によって，負定値基本 2 次形式をもつ全ての半単純無限小構造について，この構造を持つ単連結群が随伴群を被覆する回数を決定し，コンパクト群の空間の閉じた 1 径数群（すなわち測地線）の様々なタイプを研究することが可能になる．この論文の最後の部分は単純複素群についての研究に充てられ

ており，将来の非コンパクト群の理論に対するプレリュードになっている．特に任意の複素数体上の単純リー代数について，このリー代数を持つ単連結複素線形群が常に存在することを証明している．

基本群の決定が達成された次のステップは，コンパクト リー群のより高次の Betti 数の決定であった．これを遂行する方法はカルタンの論文 [11] から知ることができる．カルタンは変換群 G がコンパクトであるような等質空間 E を考えた．するとその空間は G をある閉部分群 g で割ったコセットの空間と考えられる．ふたつの閉微分形式はその差が $(p-1)$ 形式の外微分であるときに同値である．b_p をどんな線形結合も 0 とならないような p 形式の最大個数としよう．b_p が空間 E の p 番目の Betti 数に等しいということは推測されたが，そのときはまだ証明されていなかった（これは後に de Rham によって示された）．ω を 閉 p 形式とする．群 G の任意の元 s をかけて，新しい閉型式 $s\omega$ を得るが，カルタンはこれが ω と同値であることを示した．彼はそれから，s が群 G の全てにわたるときの $s\omega$ の平均を構成した．この新しい形式もまた閉であり，ω に同値であり，さらに G 不変である．その上カルタンは，もし ω が G 不変で 0 に同値であるなら ω は不変形式の外微分である，ということを類似の議論で証明した．これらの定理は，数 b_p の決定を空間 E の積分不変量の決定に還元する．カルタンはそれから後者の問題が，群 G のリー代数と部分群 g に対応する部分代数のみに依存する純粋な代数的問題に還元され得るということ（とにかく群 g が連結であるような場合には）を示した．この代数的問題はその後，E が群 G 自身か，等長変換群として G を持つような対称リーマン空間である場合について解決された．

さて，カルタンによって得られた非コンパクトリー群の研究における結果について話を進める．リーの第 3 定理（つまり全ての実リー代数はある群のリー代数であるということ）の逆について彼が与えた証明は，全ての単連結リー群が位相的にユークリッド空間と単連結半単純群の空間の積であることを意味した．従って問題は考えている群 G が半単純という特別な場合に還元される．$\mathfrak{g}$ をそのリー代数とし，$\mathfrak{g}'$ を $\mathfrak{g}$ の複素化とする．$\mathfrak{g}'$ が半単純であるから，それはコンパクト実型 $\mathfrak{g}_c$ を持つ．つまりそれはコンパクト半単純群のリー代数 $\mathfrak{g}_c$ の複素化と考えることができる．カルタンは（論文 [10] で）$\mathfrak{g}_c$ の対合的自己同型 a が存在して，$\mathfrak{g}$ は a で不変な $\mathfrak{g}_c$ の元と，a によってそのマイナスに変換される $\mathfrak{g}_c$ の元に i をかけたものによってはられることを証明した．部分代数 $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}_c$ は G の最大コンパクト部分群 g のリー代数である．カルタンは G における g の共役を点とする

空間 R を考えている．本質的な事実は，自己同型 a の存在は，R が対称リーマン空間であり，G の随伴群 Γ をその等長群にもつ（もっと正確に言えば Γ は R の等長群の identity component である）ことを導く，ということである．これによってカルタンがすでにそれ自身の価値から展開していた，対称リーマン空間論の応用への道が開けた（**III. 幾何学** 参照）．G が Γ 自身だと仮定する．すると G の全ての作用がその原点（R における原点は群 g 自身を表現する点）のまわりの回転と移換 (transvection) に一意的に分解される．移換とは a の作用によってそのマイナスに変換される無限小変換の積分から得られる G の作用である．それらは G の部分ヴァラエティで R と同相なものをつくり，このヴァラエティがユークリッド空間の位相構造を持つことがわかる．このことは任意の連結半単純リー群の随伴群が位相的にはユークリッド空間とコンパクト群の空間の積であるということを示す．その上，空間 R の等長変換の任意のコンパクト群が固定点をもつという事実を利用することで，カルタンは G の全てのコンパクト部分群が部分群 g の共役であるということを証明した．随伴群に関するこの結果は難なく同じ無限小構造を持つ単連結群に拡張することができる．それらはまた最近の岩澤の仕事によると全ての中間にある群についても成り立つ．

II. 微分方程式系

微分方程式系の理論についてのカルタンの主要な論文は [15] である．読者はカルタンの本（Les systèms différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, Hermann, 1945）の中に Pfaff 系の理論の非常に明解な解説を見ることができる．

Pfaff 系というのは，$A_1 \dots A_n$ が $x_1, \dots, x_n$ の関数であるようないくつかの $A_1dx_1 + \dots + A_ndx_n = 0$ と，さらに $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ の形の方程式もいくつか加わった系のことである．$x_i = f_i(t_1, \dots t_r)(1 \leq i \leq n)$ によって与えられる r 次元の径数つき多様体がこの系の解であるのは，変数 x とその微分を，変数 t とその微分で置き換えたときにこの方程式系が恒等的に満たされるときである．

始めにどのようにして任意の微分方程式系が Pfaff 系に還元できるかということを示す必要がある．もしその系が 2 階以上の微分方程式を含んでいるならば，まずもとの関数の微分で与えられる新たな未知関数を導入することによって，これを 1 階に還元できる．こうすると，$F_i(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p; \dots, \partial z_r/\partial x_s, \dots) = 0$ の形の方程式系が得られる．ここで z は未知で，x が独立変数である．$\partial z_r/\partial x_s = t_{rs}$ とすればもとの偏微分方程式系は，方

程式 $F_i(x;z;t)=0$, $dz_r-\sum_s t_{rs}dx_s=0$ から成る Pfaff 系によって置き換えられる．もとの系の解は，その上で変数 $x_1,\ldots,x_n$ が独立であるような r 次元の多様体である Pfaff 系の解に対応する．

カルタンの本質的なオリジナリティーは Pfaff 形式に加えて，より高次の外微分形式を導入したことにある．外微分形式の代数は幾何的目的のためにグラスマンによって展開されていた．それが微分式系の理論に使われる前に，外微分作用を導入することが必要だった．外微分形式というのは，$\sum A_{i_1\ldots i_p}dx_{i_1},\ldots,dx_{i_p}$ の形をしており，係数 $A_{i_1\ldots i_p}$ は変数 x の関数である．これらは $dx_idx_j=-dx_jdx_i$（特に $(dx_i)^2=0$）の規則で互いに掛けられる．これの外微分は $\sum dA_{i_1\ldots i_p}dx_{i_1},\ldots,dx_{i_p}$ で，微分 $dA_{i_1\ldots i_p}$ は $dx_1,\ldots,dx_n$ の線形結合として表せる．外微分という操作の基本的性質は，それが任意の変数変換に関して不変であるということである．さて，任意の Pfaff 系 $\omega_1=0,\ldots,\omega_h=0,F_1=0,\ldots,F_m=0$（ここで $F_1,\ldots,F_m$ は関数で，$\omega_1,\ldots,\omega_h$ は Pfaff 形式）を考える．するとこの系の任意の解は，もとの系に 方程式 $dF_1=0,\ldots,dF_m=0,d\omega_1=0,\ldots,d\omega_h=0$ を付加することによって得られる系の解にもなっていることがただちに分かる．もっと一般的に，I を，$F_1,\ldots,F_m,\omega_1,\ldots,\omega_h$ を含む微分形式の集合で，$\omega,\omega'\in I$ ならば $\omega+\omega'\in I$，さらに ω と任意の微分形式との積および $d\omega$ が I に属するという性質を満たす最小のもの，すなわち，I を $F_1,\ldots,F_m,\omega_1,\ldots,\omega_h$ により生成される微分イデアルとする．するともとの系の任意の解は I のすべての形式を 0 とおくことによって得られる系の解になる．ある系にその微分形式の外微分を付け加えるという操作は，系の中の方程式を二つの方法で微分した時の高階微分が同じ値を持つ，という両立条件を得る方法に対応する不変方式である．

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における p 次元の接触要素 E_p とは，$\mathbb{R}^n$ の点 m と m をとおる p 次元の $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 P の対 (m,P) のことである．$\mathbb{R}^n$ のかわりに任意の n 次元多様体 V の場合についてこの概念を一般化する必要がある．このとき m は V の任意の点で，P は m における V の n 次元接空間の任意の p 次元部分空間である．与えられた多様体 V のすべての p 次元の接触要素の全体はそれ自体が多様体 V_1 で，いわゆる V の first prolonged manifold である．もし $x_1,\ldots,x_n$ が，接触要素 (m,P) の支点における局所座標なら，P は $dx_i=L_i(v_1,\ldots,v_p)$（ここに，L_i は p 変数 $v_1,\ldots,v_p$ の線形形式）という方程式で表現される．ω をある微分形式とする．ω の係数の中の $x_1,\ldots,x_n$ に接触要素 E_p の支点の座標をいれ，ω に現れる dx_i を線形形式 L_i でおきかえれば，変数 v の外微分形式

が得られる．この形式が 0 であるとき，ω は E_p で 0 であるという． 微分形式の微分イデアル I が与えられ，I のすべての要素が E_p において 0 であるとき，E_p は I の**積分要素**であるという．

W を V の p 次元の部分多様体とする．m が W の点なら，W は m のまわりで局所的に $x_i = f_i(u_1, \ldots, u_p)$,（$u_i$ はパラメータ）と表される．点 m と，m における W の p 次元接空間によってつくられる接触要素 (m, P) は m における W の接要素とよばれる．空間 P は 方程式 $dx_i = df_i$（du_i は上に述べた径数 v_i にあたる）により表される．微分イデアル I の形式を 0 とおいて得られる系の解（すなわち積分多様体）は，その接要素が I の積分要素であるような多様体 W である．そのような解をさがす問題は，2 つの部分に分けられる．つまり，全ての積分要素の決定（代数的問題）と，これらの積分要素がある多様体の接要素となるように寄せ集める方法の決定である．

イデアル I は次数 0 の形式，つまり関数を含み得る．これらの関数を 0 とおいたものが，既約解析多様体 V_0 を表わすと仮定する．V_0 の任意の点が r_1 径数の 1 次元積分要素の支点であると仮定する．V の点で r_1 径数より大きい径数をもつ 1 次元積分要素の支点であるものがあるかもしれないが，それらは V の低次元部分多様体をなす．これらの部分多様体のどれにものっていない V の点は通常点とよばれる．その支点が通常点であるような積分要素を含む最小の多様体（1 次元の積分要素の空間内の）は，1 次元の一般積分要素の多様体とよばれるが，一般積分要素の支点は必ずしも通常点ではない．さて，どの 1 次元の一般積分要素も 2 次元の r_2 径数積分要素に含まれると仮定する．このとき，r_2 径数より大きい径数をもつ 2 次元の積分要素には含まれない 1 次元の積分要素を通常点とよぶ．上のように続けると，2 次元の一般積分要素の概念を決定することができる．同じように続け，帰納的に整数 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ を決定することができる．ある次元 n について，r_n は 0 になる．このことは n 次元の一般積分要素のすべてが $(n+1)$ 次元のある積分要素に含まれるわけではないということを意味する．n という数は系の種数とよばれる．そしてその系は n より大きくない全ての次元について**対合的**である，といわれる．p 次元の一般積分要素 E_p は，もしチェイン $E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{p-1} \subset E_p$（ここに各 $i < p$ に対し，E_i は i 次元の通常一般積分要素）をもつとき，正則であるという．I の p 次元の一般解は，p 次元の多様体で，その接要素は I の一般積分要素で，少なくともこれらの積分要素の 1 つは正則である．この方法でカルタンは初めて任意の微分方程式系の一般解の概念の正確な定

義を与えることに成功した．一般解の存在定理によると，任意の正則 p 次元積分要素 E_p は I の解である多様体の接要素である．もっと正確に言うと，もし E_{p-1} が E_p に含まれる $(p-1)$ 次元の正則元で，I の $(p-1)$ 次元の積分多様体 V^{p-1} の接要素だとすれば，V^{p-1} は，E_p に接する少なくとも 1 つの積分多様体 V^p に含まれる．この一般的な定理により，カルタンは一般解の不確定性の正確な次数をきめた．つまりいくつの任意定数や任意関数に依存するのかということである．その応用はしかし，解析的微分方程式系の考察と，解析的な解の決定に限られている．

次のステップは，系の特異解，つまり（例えば平面上の微分方程式に対し，一般解の包絡面といった）一般解の中にはない解を決定することだった．ここでのカルタンのアイディアは，与えられた方程式系から新しい系を**延長法**で構成することだった．これにより，もとの系の任意の特異解は新しい系のひとつの一般解になる．この方法は，一般ではない積分要素の座標を新しい関数として付け加え，これらが満たすべき有限微分方程式をあらかじめ構成すること，と一般的に述べられる．しかし，この方法を正確に説明することはここに書くには長過ぎる．この方法が適用できる全ての具体的な場合に，カルタンの方法は全ての特異解の完全な決定を導く．しかしそれがいつもそうなるという一般的な証明はまだ見つかっていない．これは若い野心的な数学者の注意を引き付ける価値のある研究テーマである．

微分方程式系に関するカルタン理論の主たる応用のひとつが彼の無限変換群の理論である（[16;17;18;19]）．ここで我々は，結果は豊富だが，その基礎の明確化を非常に必要としている数学の分野に触れる．無限リー群については，その名前にもかかわらず，現代代数学でその言葉が受ける正確な意味では，それは全く群ではないのである[3]．それらの本当の姿はまだ明らかでない．リーはそれらを次のように定義している．2 つの変換の積と，逆変換をとる操作に関して閉じている，n 変数の解析変換 $x'_i = F_I(x_1, \ldots, x_n)$ の集合を考える．さらにここで，F_i についてはある偏微分方程式系を満たしているとする．支障といえばもちろん，変換が定義されて可逆であるような領域について何もふれていないこと，また領域は変換ごとにかわるかもしれないということである．カルタンは，有限次元であろうが無限次元であろうがリー群は,（もとの変数が群作用によって変換されるときに妥当な方法で変換される新しい変数を付け加えることも認めた上で）いくつかの関数と Pfaff 形式を保つ変換全体のつくる群として

[3]擬群というものである．

定義されることを示した．単純であるが典型的ではない例は，2変数 x と y についての $x' = F(x), y' = G(y)$ （ここで F と G は任意の解析関数）の形の変換のつくる群である．これは2つの Pfaff 形式 udx と vdy （ここで u と v は新しい変数）を保つ群と考えられる．ここに udx と vdy は次のように変換される．$u' = u(dF/dx)^{-1}$, $v' = v(dG/dy)^{-1}$．上に示した方法で群を記述することにより，カルタンはリーが有限群について展開した構造論を無限群に拡張できた．いくつかの変数，たとえば $x_{r+1}, \ldots, x_n$ と，いくつかの Pfaff 形式 $\omega_1, \ldots, \omega_h$ が不変で，w_i は変数 $x_1, \ldots, x_n$ の微分だけを含むが，その係数は他の変数 u を含んでもよいという条件によって定義される群 G があると仮定する．すると

$$d\omega_i = \sum c_{ijk}\omega_j\omega_k + \sum a_{ijk}\omega_j\eta_k$$

と書ける．ここに η_k は任意変数 u の微分のある線形結合である．カルタンは係数 c_{ijk}, a_{ijk} は不変量 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ だけに依存することをいつも仮定できるということを示した（有限次元の群に関していつもそうであるように，もし群が推移的に働くなら，c_{ijk}, a_{ijk} は一定である）．これらの係数はその群の構造を決定する．有限次元の群とちょうど同じように，それらは勝手にはとれない．カルタンは，それらが群を定義するために満たされなければいけない条件を与え，それにより，リーの第3基本定理を無限群へと一般化した．

ある群によって変換される変数に新しい変数を加える操作は群の延長とよばれる．カルタンは，もし2つの群が相似な延長をもつ，つまり，延長が独立変数の取り替えによって互いに他方からつくられるとき，それらは互いに同型になるといっている．彼は構造が分っている2つの無限群が同型かそうでないかを，どのようにして見極められるかを示している．彼はこの方法を単純無限群の分類の問題に応用し，それらが8個の一般型に分類できることを示した．

無限群のカルタン理論は彼が同値問題について行った研究にその起源をもつ．一般的な問題は次のように定式化される．G を n 次元空間に働く線形群とする．$\theta_1, \ldots, \theta_n$ と $\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_n$ を $x_1, \ldots, x_n$ と $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ をそれぞれ変数とする Pfaff 形式の二つの組とする．座標変換

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

で

$$\bar{\theta}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\theta_j, \quad i = 1, \ldots, n$$

となり，この線形変換が G に属するものが存在するかどうかを決定しよう．このため，$u_1,\ldots,u_m$ を G の径数として，Pfaff 形式

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(u)\theta_j \tag{1}$$

$$\bar{\omega}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\bar{u})\bar{\theta}_j,\quad i=1,\ldots,n \tag{2}$$

を導入する．ここに u と $\bar{u}$ は任意変数である．θ_i と $\bar{\theta}_i$ の形の組が上の意味で同値であるのは $\bar{x}_i,\bar{u}_r$ が x_j,u_s $(i,j=1,\ldots,n;r,s=1,\ldots,m)$ の関数として

$$\bar{\omega}_i=\omega_i\quad i=1,\ldots,n$$

であるようにきめられる時に限る．このような系は Pfaff 形式を扱う一般的な方法によって議論される．最初のステップはもちろん，そのシステムに方程式 $d\bar{\omega}_i=d\omega_i$ を付け足すことである．もし $d\omega_i$ を ω_i 自身と任意変数の微分によって表すなら，この表現の係数は，変数 x だけを含むときには，不変量 $I_k(x)$ を生じ，もとの系は，方程式 $I_k(\bar{x})=I_k(x)$ とこれから微分で得られる方程式を加えることにより，拡張できる．カルタンはこの操作を続けることにより，最終的に微分だけから得られる不変量の完全系が得られることを示した．しかし考える系が次元 n について対合的でないならば，不変量からなる系の完全性は，微分式系のすべての特異解は延長法によって得られるという，まだ完全には証明されていない（上述）定理に依存する．

カルタンが彼の微分方程式論を適用した例の中から，次のことを述べる．（1）様々な微分幾何の問題へ応用；（2）解析力学における積分不変量の原理；（3）一般相対性理論．

実際のところ，微分幾何の問題から発生する微分方程式の研究は常に彼の興味を喚起し，このテーマに関する論文は彼の数学者としての生涯を通じてみられる．[23] に与えられる多くの例は微分形式を使うことの利点をかなり決定的に示している．注目すべき結果の1つは，n 次元の任意のリーマン空間は $n(n+1)/2$ 次元のユークリッド空間に局所的にうめこめるという Schläfli の予想の証明 [22] である．この定理が Levi-Civita の平行性のオリジナルな定義の中で果たす役割は小さくなく，微分幾何学者の注意を引いた．

解析力学の積分不変量における彼の仕事もまた微分方程式論の応用とみ

なすことができる [21]．数学的にその問題は軌道を求める問題で，それは

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad i = 1, \ldots, n$$

の形の微分方程式系の解である．標準的な方法は，軌道をある変分問題の極値として定義するハミルトンの原理による．不幸なことにその被積分関数は簡単な物理的解釈を持たない．代わりの方法はポアンカレによって提案された．彼は多重積分

$$\int \cdots \int \sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots . x_n, t) dx_{i_1} \ldots x_{i_p}$$

を，軌道でおおわれる領域上の値が運動で不変な時に，不変であるとよんだ．実際，もしその領域が任意のときは絶対的，もし不変性が閉じた領域に対してのみ正しいときは相対的といわれる．p_i, q_i， $i = 1, \ldots, n$ が自由度 n の力学系の正準座標であれば，ポアンカレの原理は，軌道は相対積分不変量

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$$

をもつ曲線として特徴付けられることを主張している．

カルタンの原理はポアンカレの原理の変形である．彼は，微分式系理論からアイディアを得た．軌道の微分式系は $2n - 2$ 個の独立な第一積分をもつ．カルタンはある外微分形式が不変である，すなわち軌道にのみ依存するということは，この形式がこれらの第一積分からつくられる形式であることを意味することに気づいた．もとの変数に関して表現すると，それは独立変数 t を含み得る．ここから dt を含む項を除くとポアンカレの意味での不変積分の被積分関数を得る．このため後者は不変微分形式のトランケイトされた形式である（つまり，軌道の第一積分から得られる形式）．逆に，ポアンカレの不変積分の被積分関数が与えらられたとき dt を含む項を付け加えることは，不変微分形式を得るためであることがわかる．カルタンの原理は軌道を不変微分形式を許容するものとして特徴付ける．その上後者は簡単な物理的解釈を持つ．従ってこれはおもしろい補完物を形式力学に与える．

一般相対性理論と統一場理論に関連して，カルタンは重力方程式の可能な形と，統一された重力場と電磁場についていくつかの機会に研究している．彼は非常に綿密な解析をし，そのような微分形式のすべての可能な形を決定した．彼はまた，後にアインシュタインの統一場理論の基礎となっ

た曲率を持たずトージョンを持つようなリーマン空間の例を最初に導入した人でもある．一見したところ，これらの研究は彼の純粋数学の研究と同じ重要性を持つものではない．

III. 幾何学

リー群論が微分幾何と密接な関係を持っているにもかかわらず，カルタンは微分幾何の実質的な仕事を比較的遅い時期まで始めなかった．彼の微分幾何の最初の論文のシリーズは変形問題に関連している [27;28]．彼が動標構法（それは彼が晩年に気に入っていたテーマの1つで，未だに完全には開拓されていない）のすべての本質的アイデアをその時得たということは明らかである．

その方法は新しくはなかった．それは Darboux, Robacour や他の人達 [39;41] によって効果的に使われた3次元の動標構法を任意の等質空間に一般化したものである．最も一般的な場合にでさえその本質的アイディアのうちのいくつかは Emile Cotton によってすでに与えられていた．それはまた後に Kowalewski によって発見されたように，微分幾何の Cesaro による "内在的方法" とも密接に関係していた．カルタンにとっての魅力はその方法ではなく，それが効果的に導く幾何的な結果であった．彼の本 [41] で彼がどのように数多くの例の研究を楽しみ，非常におおまかなアウトライン以外はその一般法則を論じたがらなかったということを知るのはおもしろい．

我々は現代のことばでこの方法の説明を与えることを試みる．問題は r 次元のリー群 G が働く，n 次元の等質空間 E の中の p 次元の部分多様体 M の局所理論である．O を E の点とし，H を O を動かさない G の部分群とする．このとき O を E の点 P 移す G のすべての変換の集合は H に関する G の左コセット gH で，E は左コセットの空間 G/H と同一視される．この同一視のもとで，G の E への作用は左変換で表される．この過程は O のとりかたに依存する．もし O を O' で置き換え，g_0 が O' を O に移す G の元とすると，O' を固定する G の部分群は $g_0^{-1}Hg_0$ で，O' を P に移す G の変換の集合は gHg_0 である．言い換えれば，後者は固定元を右からかけることを除き決まる．

動標構法は G の作用に関する M の微分不変量をきめる方法で，実際 2つの与えられた部分多様体が G の変換で移りあえるかどうかをきめるのに十分な不変量を決定する方法である．その主なアイディアは等質空間 E から群 G への移行である．実際，$\psi : G \to G/H$ を $g \in G$ を コセット

gH にうつす自然な射影とする．M から我々は（O の選択に依存する）固定された元の右からの作用を除いて決まる部分多様体 $F_0 = \psi^{-1}(M) \subset G$ を得る[4]．F_0 は一般的に p より高い次元の多様体で，M の 0 位のフレーム（標構）の多様体とよばれる．さて，H のリー代数 $\mathfrak{h}$ は G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の部分代数である．すると $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ (その元は Mauer-Cartan 形式とよばれる）の中に，$\mathfrak{h}$ に直交する $\mathfrak{g}^*$ の元全体からなる n 次元部分空間 $\mathfrak{n}^*(G,H)$ がある．恒等写像 $i_0 : F_0 \to G$ の双対写像は $\mathfrak{n}^*(G,H)$ の元を F_0 上の Pfaff 形式に移す．これはカルタンによって 0 位の主成分（the principal component of order 0）とよばれた．それらの中にちょうど p 個の線形独立なものがあり，それ以外はそれらの線形結合である．そのような線形結合の係数は動標構法において重要な役割を果たす．それらから時に M の微分不変量を消去によって得ることができる．

M についてより多くの情報を得るためにはより高い位数の接触要素を考えなければならない．一般原理は上の考察をそれらに拡張することである．M を局所的に

$$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_p) \quad i = 1, \ldots, n$$

で定義されるものとする．ここに関数 f_i は十分多くの連続な偏導関数をもつか，より強く解析的な偏導関数をもつとする．ある点における x_i とその s 階までの偏導関数の値は，許容される座標変換で x と u が変わる際の通常の規則のもとで s 位の接触要素 C_s を構成する．このとき 0 位の接触要素は点自身である．正の s 位の接触要素は s 階の導関数を無視することにより，$s-1$ 位の接触要素を一意にきめる．

E のすべての p 次元部分多様体に対し，s 位の接触要素全体は G が作用する空間 E_s である．M の s 位の接触要素は E_s の部分多様体 M_s をつくる．一般の s の場合は $s=0$ の場合とは次の 2 つの重要な点で異なる．（1）群 G は必ずしも推移的に E_s に作用するとは限らない．したがって E_s は G の軌道に分解する．（2）与えられた C_s を固定する G の部分群 H_s は連結でないかもしれない．たとえば運動の合同群をもつユークリッド空間で $p=1, s=1$ の場合のように．この例で M は曲線で C_1 は接方向と同一視される．直線を動かさない運動は二つの連結成分を持つ．

この現象は同じ C_s が，H_s を H_s の単位元をもつ連結成分におきかえて得られるいくつかの向き付けられた s 位の接触要素を持ち得るということを示している．このプロセスは自由度を含んでいる．なぜなら H_s の共役

[4] M が単連結領域なら．

部分群の類だけが C_s によって決まるからである．一方でこの事実のおかげで，一般的な仮定のもとでふつうの**向き付けられた** s 位の接触要素に有限個の数で座標を入れることができる．これらは位数が s より大きくない微分不変量となる．

T を E_s における G の軌道とし，それらのうちひとつの点を固定する G の部分群を $H_s(T)$ で表し，$H_s(T)$ の単位元を含む連結成分を $H'_s(T)$ で表す．すると**向き付けられた** s 位の接触要素の空間は和集合 $\cup_T G/H'_s(T)$ と同一視され，M のそれは $\cup_T G/H'_s(T)$ の部分多様体 M_s と考えられる．$\psi_{s,T}: G \to G/H'_s(T)$ を自然な射影とするとき，部分多様体

$$F_s = \cup_{C_s \in M_s} \psi^{-1}_{s,T}(C_s)$$

は M の s 位のフレームの空間とよばれる．0 位のフレームの空間を一般化するために，$\mathfrak{h}_s$ で $H_s(T)$ のリー代数を表し，$\mathfrak{h}_s$ と直交する $\mathfrak{g}^*$ のすべての元からなる $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の部分空間を $\mathfrak{n}^*(G, H_s(T))$ で表す．恒等写像 $i_s: F_s \to G$ の双対写像は $\mathfrak{n}^*(G, H_s(T))$ の元を s をこえない "主成分" とよばれる F_s の Pfaff 形式に移す．動標構法の主な特徴は，G における F_s の研究が E における M の局所幾何的性質の最も重要なものを与える，という結果である．異なる位数のフレームの多様体の決定は s についての帰納法によって達成される．

カルタンはフレームのもっと幾何学的な描像を持っていた．彼にとってそれらは E の配置で，ひとつの配置を他の配置に移す G の元がただひとつ存在するようなものである．合同変換を持つユークリッド空間のフレームとしては (P, U_1, U_2, U_3) で次を満たすものを考える．(1) 点 U_1, U_2, U_3 は P から 1 の距離にある；(2) 直線 PU_1, PU_2, PU_3 のどの任意の 2 つも直交する；(3) ベクトル PU_1, PU_2, PU_3 は右手系をなす．ユークリッド空間の中の曲面について，0 位のフレームは曲面上の点 P である．1 位のフレームはこれに加え PU_3 が曲面の法ベクトルであるという条件を満たす．ここでは向きは U_3 がどちらの法方向を向いているかできまる．もし P が臍点でないとすれば，2 位のフレームは，各点で PU_1, PU_2 が主曲率方向であるという条件によって一意的に決まる．2 つの主曲率は位数 2 の不変量である．

今までは議論を一般の接触要素に限ってきた．しかし微分幾何の中の最も面白い性質はおそらく一般でないものに関係するものだろう．たとえば，平面閉曲線の 4 頂点定理や，種数が 1 でない閉局面上の臍点の存在定理は，閉部分多様体上の特別な接触要素の存在についての叙述である．この方面

に関しては一般的な結果は知られておらず，動標構法が何か手がかりを与えることが望まれている．

この視点から，変形問題が自然に現れる．E の 2 つの部分多様体 M^p と M^p_* が G に関して位数 s で変形可能であるとは，M^p の s 位の接触要素を M^p_* の s 位の接触要素に移す G の変換があるとき，つまり s より大きくない位数の不変量と主成分が等しいような部分多様体間の 1 対 1 写像があるときである． G がユークリッド空間の運動群，$p=2$，$s=1$ であるとき，この変形可能の概念は Gauss, Minding, Darboux やその他の人によって行われた古典的なものと同じである． G が実射影空間の射影共線変換の群で，$p=2$，$s=2$ のときは問題は曲面の射影変形として知られるもので，これは Fubini や Čech によって詳細に研究された．

位数が十分大きいとき，この方法は等質空間における局所微分幾何学の本質的な問題の解，つまり 2 つの部分多様体が群 G の変換によって互いに移りあうかという問題の解答を与える．

実は具体的なケースについて，特に p が大きいとき，その方法を実行すること（つまり，異なる位数の不変量とフレームを決定すること）はかなり複雑である．その上，一般性の仮定はすぐに非現実的になってしまう．カルタンは，計算を簡単にする様々な方法を発見し，特別な場合に適用した．数学でよくあるように，視点の一般化は特殊ケースをより効果的に扱うのに役立った．

彼が行った応用のいくつかは，超曲面の共形変形 [28]，曲面の射影変形 [27]，ユークリッド空間もしくは非ユークリッド空間における定曲率部分多様体の理論 [25;26] などである．2 番目のものは，イタリアの幾何学者の大きな注目を集めた問題である．カルタンは 1 変数の 6 つの任意関数に依存する曲面のクラス以外は，曲面は非自明には変形できないということを証明した．さらに，もし曲面が射影的に変形可能（非自明に）なら，変形先の曲面はせいぜい 3 つの任意定数にしかよらない．これは問題を解決するものではなく，おそらく射影変形可能曲面の研究をよりおもしろくするものだろう．1 つ例を挙げると，2 径数をもつ射影的に同値でない曲面に射影変形可能な曲面が存在するか，という問題はまだ解決されていない．

ユークリッド，もしくは非ユークリッド空間内の定曲率部分多様体の研究は，展開可能曲面の古典的扱いを一般化する [25;26]．カルタンは徹底的な研究をし，そのような部分多様体の自由度を決定した．それらは任意の状況で存在するとは限らない．例えばもし p 次元の部分多様体の曲率が外の空間の曲率より小さければ，後者は $2p-1$ より低くない次元を持たね

ばならない．彼が強調したのは，研究が意味をもってなされる前に，与えられた性質を持つ部分多様体の存在と自由度の考察が必要だということである．この目的のため彼の対合的微分式系の理論はもっとも有効に適用された．

この線にそった彼の仕事の中でもっとも注目すべきものは，球面の等径超曲面族に関する結果である [42;43]．それは Levi-Civia の問題で始まった．つまり，第 1，第 2 ベルトラミ微分係数に従属するリーマン空間上のスカラー関数の研究である．この関数を定数とおいて得られる超曲面は等径超曲面族をなすといわれる．リーマン空間が 0 または負の定曲率をもつときは，等径超曲面族の決定はさほどむずかしくない．これはそのような超曲面は高々 2 つの主曲率をもつからである．リーマン空間が正の定曲率をもつときは，状況は大変複雑だが，また最も興味深い．カルタンはこの場合，等径超曲面族で 3 つの主曲率を持つものが存在し，それは空間の次元が 4, 7, 13, 25 の時に限ることを示した．この最後の族は 52 次元の例外型単純リー群と関係する．ここで初めてこの群が幾何学的に実現された．類似の結果が 4 つの主曲率をもつ等径超曲面族でもいえる．これらは 5 次元と 9 次元の空間にしか存在しない[5]．これは外の空間の次元が重要な役割を果たす幾何学の問題の数少ない例のうちのひとつである．

アインシュタインの一般相対性理論は微分幾何に新たな刺激を与えた．宇宙の適当なモデルをみつけるための努力の中で，幾何学者達は視野を古典的空間（ユークリッド空間，非ユークリッド空間，射影空間，共形空間,...）の部分多様体の研究から，内在的に定義されるもっと一般的な空間の研究に広げた．その結果はリーマン空間上の Gauss や Riemann の仕事を，アフィン接続，Weyl 接続，射影接続，共形接続といった接続を持つ空間に拡張することであった．ときに非リーマン幾何とよばれるこの一般化の中で，重要な道具は Ricci と Levi-Civita の絶対微分解析[6]である．得られた結果は幾何学的に非常におもしろい．たとえばカルタンや， Veblen, Eisenhart, Thomas によって独立に展開された射影接続の理論において，2 階の微分方程式系で定義される道の系を持つ空間上には一般化された射影幾何が定義され，それはその微分方程式系が直線の方程式である時に通常の射影幾何に還元されることが示された．他にも例はたくさんある．このステージの問題は，ふたつである．(1) 存在する面白い空間のほとんどを含む幾何の定義を与えること，(2) 新しい幾何を扱う解析的方法を展開

[5]本講究録「等径超曲面今昔」参照．
[6]テンソル解析のこと．

する．絶対微分解析が不十分であることは，ますます明らかになっている．

この目的のためにカルタンは，最も理解しやすく満足のいくプログラムを展開し，その効果を決定的方法で発表した [31;39]．この貢献は彼の幾何学的洞察力を明確に示すもので，我々はそれを彼の微分幾何の仕事におけるもっとも重要なものとみなしている．それは現代のファイバー束の概念によって最もよく説明される．$p: B \to X$ をファイバー Y と構造群 G をもつファイバー束とする．X を微分多様体，G をリー群とする．$U, V, W, \ldots$ を座標近傍による X の被覆とする． $p^{-1}(U \cap V)$ に属する B の点は， U と V それぞれに対し，座標 (x, y) と $(x, g_{UV}(x)y)$, $x \in U \cap V$, $y \in Y$ をもつ．ここに G の Y への作用を左からの積で表す．g_{UV} という関数は $x \in U \cap V$ に対して値を G でとる．その双対写像は G の Mauer-Cartan 形式を $U \cap V$ 上の形式にうつすが，それを ω^i_{UV}， $i = 1, \ldots r$ で表す．$a^i_j(g)$, $g \in G$ で Mauer-Cartan 形式の空間への G の随伴表現を表す．束の接続はそれぞれの座標近傍 U の上で， Pfaff 形式 θ^i_U, $i = 1, \ldots r$ の集合によって定義され次を満たす．

$$\theta^i_U = \omega^i_{UV} + \sum_{j=1}^{r} a^i_j(g_{UV})\theta^j_V, \quad i = 1, \ldots, r$$

この条件が 3 つの座標近傍 U, V, W の交わりで引き継がれることを証明するのは簡単である．曲率テンソルは 2 次外微分形式

$$\Theta^i_U = d\theta^i_U - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\theta^j_U \wedge \theta^k_U \quad i = 1, \ldots, r$$

であたえられる．ここに c^i_{jk} は G の構造定数である．座標変換のもとで，それらは随伴表現に従って変換される．

実際にカルタンがとった方法は少し違う．古典的な平行性の概念に導かれて，彼は径数曲線に沿ってファイバーを展開する可能性をより強調した．現在の定式化ではこの可能性は微分式系

$$\sum_{j=1}^{r} a^i_j(g)\theta^j + \omega^i(g) = 0, \quad i = 1, \ldots, r; g \in G$$

が座標近傍の選択に独立であるという事実から生じる．X の径数曲線に対応して， G の単位元を通る微分式系の積分曲線 $g(t)$ が一意的に決まる．曲線 $g(t)$ は Y の 1 径数変換族を引き起こす．カルタンはこのプロセスを径数曲線に沿った展開と呼び，それを接続の定義にした．

ファイバー束の概念と述語がなかったらこれらの概念を満足のいく方法で説明することは困難だっただろう．さらに状況を複雑にさせたのは，カルタンが，今ではファイバーとよばれているものを接空間とよんだこと，一方基礎空間 X は微分多様体でそれ自体が接空間を持っていることであった．しかし彼には幾何学の状況は，より一般のファイバーを持つファイバー束の導入を必要としていることがはっきりと分かっていた．他の何人かの数学者による，ファイバーを基礎空間の微分構造によって結びあわせるという試みは，アフィン接続空間の経験から提案され，幾何学的問題とは無関係の複雑な計算をもたらした．

接続の概念を微分幾何における指導原理とすると，本質的な問題は幾何学の各々の問題に対してファイバー束と接続を定義することになる．これは決して千篇一律な問題ではなく，カルタンはそれを様々な場合に実行している．中でも重要なものは（1）道の幾何の射影接続 [29]；(2）リーマン空間の共形理論における共形接続；(3）フィンスラー空間における計量接続；(4）今ではカルタン空間として知られている [38] 超曲面の面積の概念に基づく空間における計量接続；(5）平面フィスラー幾何の一般化の1つである積分幾何 $\int F(x, y, y', y'')$.

これらの特別な例から得られる結果は，接続の概念は微分幾何における指導原理であるという信仰に根拠を与えるようにみえる．例えばフィンスラー幾何において興味深い空間は，変分解析の**正則**問題を定義するような空間である．この事実は，空間に接続を定義しようとするとき明らかになる．

ある空間の接続が有効であるためには，それはより多くの性質を持たなくてはいけない．空間の全ての幾何学的性質を反映しなければならない．正確には，2つの空間が座標の許容変換によって同値であるのは接続が同値であるときに限る，という要求をみたすことである．こうしてその解析的な面については**II**で議論した同値問題に自然に行き着く．簡単な幾何学的問題（リーマン幾何のような）においては接続の導入は自動的に同値問題を解決するが，もっと一般的な場合には，最初に同値問題を解決し，次にその解を幾何学的に解釈するという回り道が勧められる．カルタンの同値問題の扱いはこのような幾何学的問題に特に適した方法を与えている．

カルタンは，最初は彼の記念誌で，後には彼の Leçon の中で彼の接続に関する一般的な考えをリーマン幾何の場合に適用している [30;35]．彼自身は計算をさけることは決してなかったにもかかわらず，彼は当時とてもファッショナブルだがほとんどが幾何的に面白くない微分幾何における計

算数学への嫌悪を隠さなかった．彼は [35] の前書きの中で，添字の氾濫の下にしばしば隠されている単純な幾何学的事実を世間に紹介する，という彼の目標を述べている．その結果この本はリーマン幾何にとてもオリジナルな説明を与え，この分野で今でも標準的なものとなっている．

彼のリーマン幾何におけるもっとも重要な仕事は間違いなく対称リーマン空間の理論である [33;34;37]．リーマン計量の局所性質が Riemann-Christoffel 曲率テンソルとその共変微分によって与えられるということはよく知られている．したがって局所ユークリッド空間の次に最も単純なリーマン空間は，Riemann-Christoffel テンソルの共変微分がゼロになるような空間である．これらの空間は定曲率のリーマン空間を含み，カルタンは以下にのべる明らかな理由によってこれを対称とよんだ．彼は 1927-1935 年の間にこのテーマについての論文を出している．おそらくその広範さのためにこのテーマは浴びるべき注目を浴びなかった．複素単純リー環の実型の決定に対する重要性は上で議論された．ここではこの理論の幾何学的側面の短いサーヴェイをその古典幾何学，多変数解析関数論，数論，トポロジーとの関係と共に与えることにする．

カルタンはすぐに定義をもっと幾何学的に述べられることを発見した．対称リーマン空間は Levi-Civita 平行移動が断面曲率を保つ空間，または点対称が等長である空間と定義してもよい．第 2 の定義から，ただちに空間は等長群の推移作用を持ち，点を動かさない部分群の連結成分はコンパクトであることがわかる．この結果は対称リーマン空間と等質空間を関係付けた．

すべての対称リーマン空間を数え上げることは単純な問題ではない．カルタンはまず対称リーマン空間が（局所的に）二つの低い次元のリーマン空間に分解されるなら，そのどちらもが対称であることを示した．問題はしたがって，そのような分解ができない既約な場合に還元される．カルタンは次に二つの異なる方法をその問題に適用した．

第 1 の方法は既約対称リーマン空間のホロノミー群になりうる直交群の部分群の決定からなる．このような部分群は形式

$$\sum R_{ij,kl}x^i y^j x^k y^l$$

を不変にする．ここに，$R_{ij,kl}$ は Riemann-Christoffel 曲率テンソルである．このようにそれは直交群のありふれた部分群ではなく，この制限が問題の集結を可能にする．しかし不幸にもこの方法は大変複雑な計算を要する．

思いがけない視野を開いたのは第 2 の方法である．全ての等長変換からなる群の連結成分を G で表し，点 O を固定する部分群の連結成分を H と

する．H はコンパクトである．σ で O における対称変換を表すと，$g \in G$ を $\sigma g \sigma \in G$ に移す写像は G の対合的自己同型である．この自己同型のもと，H の全ての元は動かない．逆に，連結リー群 G が対合的自己同型で固定点集合の連結成分がコンパクトであるようなものを持つと，等質空間 G/H は対称リーマン空間になる．さて G のリー代数に基底を選び，対合的自己同型のひきおこす自己準同型が基底ベクトルのいくつかの符号を変えさせ，他のものは保つようにする．この規格化は G の無限小構造にとても強い結論を引き起こす．実際，もしいま G/H とかくことができる空間が既約で，局所ユークリッドでなければ（すなわち Riemann-Christoffel 曲率テンソルが 0 でなければ），群 G は単純であるか，二つの同型なコンパクト単純群の直積になる．

後者では G の元は $(a,b), a, b \in H$, H は単純群とかける．すると対合的自己同型は $(a,b) \to (b,a)$ でなければならず，空間は H と同一視される．すなわちこの場合はコンパクト単純リー群の空間の幾何に帰着される．

より興味深いのは，G が単純の場合である．G が複素単純リー群で，H がコンパクト実型であるとき，空間 G/H はユークリッド空間と同相で，G を等長群としてもつ唯一の対称リーマン空間である．カルタンはこれを G の基本リーマン空間とよんだ．G が非コンパクトな単純実リー群の時，対応する複素単純リー群 G を考え，G の基本リーマン空間 E を考える．各元を複素共役に移す G の対合的自己同型は E に対称性を引き起こし，E の全測地的多様体を不変にする．これは ユークリッド空間と同相で，群 G の唯一の対称リーマン空間である．G がコンパクト単純実リー群の時は状況がより複雑であり，このときは G を等長群にもつ対称リーマン空間は一意ではない．このように，無限小構造の視点から，非コンパクト単純群 G が与えられると，ただひとつ対称リーマン空間がきまる．これは等質空間 G/H で，H は G の最大コンパクト部分群（これも G の内部自己同型を除き，一意的に決まる）である．たとえば，ユニモデュラー実線形群 $GL_n(R)$ に属する対称リーマン空間は n 変数の正定値 2 次形式の空間である．ユニモデュラー複素線形群 $GL_n(C)$ に属する対称リーマン空間は n 変数の正定値エルミート形式の空間である．これは疑いなくこれらの形式が古典および現代の数論に果たす役割を説明している．

対称リーマン空間の研究はリーマン幾何と古典幾何の関係に重要な光を投げかけ，古典幾何のいくつかの現象を統一し，説明するのに役立つ．カルタンはこのアイディアを彼の本 [36] の中で複素射影幾何に適用している．たとえば，複素射影直線の幾何と非ユークリッド双曲空間には関係が

あることが知られている．今のことばでいえば，双曲空間は複素射影直線の共線射影変換群の基本リーマン空間である．

実はカルタンの対称リーマン空間に対する興味は関係はあるが別の問題から起こった．これはその自平行曲線が測地線であるような絶対平行性をもつリーマン空間の研究である．よい例は非ユークリッド楕円型空間の Clifford 平行性である．この方面の最初の結果はカルタンと J.A. Schouten の共同研究で得られた．彼らは絶対平行性を持つ既約空間は丁度コンパクト単純リー群で，ただひとつの例外が 7 次元の楕円型空間であることを発見した．これの存在は Cayley 数の性質に関係している．

対称リーマン空間理論のもうひとつの応用は多変数複素関数に対してなされた． Henri Cartan は複素多変数の空間の有界領域を不変にする擬共形変換全体の群を研究し，これがリー群であることを示した．この結果を使って，カルタンは等質な領域を研究した．すなわち擬共形変換が推移的に作用する領域である．彼はそのような領域全てを決定することには成功しなかった，多分それらがあまりにもたくさんあるから．しかしながら彼は対称性を仮定して全ての空間を決定した，すなわち，領域の各点 O に対し，O を孤立固定点とするような領域上の対合的擬共形変換が存在するような空間をである．こうすると群が半単純になるという事実のおかげである．既約有界対称等質領域は 4 つの大きなクラスと，二つの例外，16 次元と 27 次元のものからなる．これらの領域は最近 Siegel の保型関数と解析数論の研究で重要な役割を果たし，これらの群の不連続部分群が研究されている．対称でない有界等質領域は知られていない．

対称空間の概念はカルタンが非リーマンとよんだ場合に拡張される．これは等質空間 G/H で，G の対合的自己同型 σ をもつが，その固定元からなる部分群の連結成分 H がかならずしもコンパクトでないものである．彼の一般の対称等質空間への主要な貢献は，Betti 数に関わり，これは前にコンパクトリー群の Betti 数との関係を述べたところで説明した [11]．ここに得られた結果は，任意のコンパクト対称等質空間で成り立ち，このような空間の Betti 数の決定は純粋に代数的問題となる．非リーマン対称空間はこのほかには殆ど研究されていない．

de Rham の定理の結果としての空間の位相的性質の研究における積分不変量の重要性に加え，これらは幾何学のもうひとつの分野，積分幾何学として知られる分野でも役割をになう．ここでまたカルタンの外微分形式がもっとも威力を発揮する．1898 年，彼はユークリッド空間の運動群で不変な直線と平面の空間における多重積分の論文をかいた．この論文は，

イギリスの数学者 Crofton により構築され，後に Blaschke とその一派により展開された積分幾何において，重要なステップを記した．カルタンが群を線形微分形式の集合を保つ変換の集合として定義することを強調し，これをかれの無限群の研究の出発点にしたにもかかわらず，この論文を除いては，高次の不変微分形式に立ち戻らなかったのは極めて奇妙である．彼の外微分形式は今や積分幾何学において欠くことのできない道具になっている．

2 Bibliography

以下はカルタンの数学論文の部分的リストである．1939 年以降のものについては完全なリストである．1939 年までの完全なリストは [2] にあり，[1] は 1931 年以前の完全なリストをふくむ．

I. Sources

1. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Élie Cartan*, Paris, Gauthier-Villars, 31.
2. *Selecta; Jubilé scientifique de M. Élie Cartan*, Paris, Gauthier-Villars, 1939.

II. Group theory

3. *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, Thèse, Paris, 394; 2d ed., Paris, Vuibert, 1933.
4. *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes*, Ann. Fac. Sci. Iniv. Toulouse vol. 12B (1898) pp. 1–99.
5. *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, Bull. Soc. Math. France vol. 41 (1913) pp. 53–96.
6. *Les groupes réels simples finis et continus*, Ann. École Norm. vol. 31 (1914) pp. 263–355.
7. *Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, J. Math. Pures Appl. (6) vol. 10 (1914) pp. 149–186.
8. *La géométrie des groupes de transformations*, J. Math. Pures Appl. (9) vol. 6 (1927) pp. 1–119.
9. *La géométrie des groupes simples*, Ann. di Mat. vol. 4 (1927) pp. 209–256.
10. *Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne*, J. Math. Pures Appl. (9) vol. 8 (1929) pp. 1–33.
11. *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques vol. 8 (1929) pp. 181–225.
12. *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*, Mémorial des Sciences Mathématiques vol. 42, 1930.

13. *Les représentations linéaires des groupes de Lie*, J. Math. Pures Appl. (9) vol. 17 (1938) pp. 1–12.

14. *Leçons sur la théorie des spineurs* I, II, Actualités Scientifiques et Industrielles, nos. 643, 701, 1938.

III. Differential equations

15. *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales*, Ann. École Norm. vol. 18 (1901) pp. 241–311.

16. *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. École Norm. vol. 21 (1904) pp. 153–206.

17. *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. École Norm. vol. 22 (1905) pp. 219–308.

18. *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Ann. École Norm. vol. 25 (1908) pp. 57–194.

19. *Les groupes de transformations continus, infinis, simples*, Ann. École Norm. vol. 26 (1909) pp. 93–161.

20. *Sur les équations de la gravitation d'Einstein*, J. Math. Pures Appl. (9) vol. 1 (1922) pp. 141–203.

21. *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922.

22. *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques vol. 6 (1927) pp. 1–7.

23. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Paris, Hermann, 1945.

IV. Geometry

24. *Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé*, Bull. Soc. Math. France vol. 24 (1896) pp. 140–176.

25. *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien*, Bull. Soc. Math. France vol. 47 (1919) pp. 125–160.

26. *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien*, Bull. Soc. Math. France vol. 48 (1920) pp. 132–208.

27. *Sur la déformation projective des surfaces*, Ann. École Norm. vol. 37 (1920) pp. 259–356.

28. *Sur le problème général de la déformation*, C.R. Congrès Strasbourg, 1920, pp. 397–406.

29. *Sur les variétés à connexion projective*, Bull. Soc. Math. France vol. 52 (1924) pp. 205–241.

30. *La géométrie des espaces de Riemann*, Mémorial des Sciences Mathématiques, vol. 9, 1925.

31. *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés*, Acta Math. vol. 48 (1926) pp. 1–42.

32. (with J. A. Schouten), *On the Riemannian geometries admitting an absolute parallelism*, Neder. Akad. Wetensch. vol. 29 (1926) pp. 933–946.

33. *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann*, Bull. Soc. Math. France vol. 54 (1926) pp. 214–264.

34. *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann*, Bull. Soc. Math. France vol. 55 (1927) pp. 114–134.

35. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier-Villars, 1928; 2d ed., 1946.

36. *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Paris, Gauthier-Villars, 1931.

37. *Les espaces riemanniens symétriques*, Verh. Int. Math. Kong. Zurich, vol. I, 1932, pp. 152–161.

38. *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 72, 1933.

39. *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus, et les espaces généralisés*, Actualités Scientifiques et Industrielles no. 194, 1935.

40. *Sur les domains bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*, Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. vol. 11 (1935) pp. 116–162.

41. *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, Paris, Gauthier-Villars, 1937.

42. *Famille de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Ann. di Mat. vol. 17 (1938) pp. 177–191.

43. *Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques*, Math. Zeit. vol. 45 (1939) pp. 335–367.

V. Papers published after 1939

44. *Sur quelques familles remarquables d'hypersurfaces*, C.R. Congrès Sci. Math. Liège, 1939, pp. 30–41.

45. *Sur les groupes linéaires quaternioniens*, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich vol. 85 (1940) pp. 191–203.

46. *Sur des familles d'hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphériques à 5 et à 9 dimensions*, Universidad Nacional de Tucumán, Revista vol. A 1 (1940) pp. 5–22.

47. *Sur un théorème de J. A. Schouten et W. van der Kulk*, C.R. Acad. Sci. Paris vol. 211 (1940) pp. 21–24.

48. *Sur une classe de surfaces apparentées aux surfaces R et aux surfaces de Jonas*, Mem. Vol. Dedicated to D. A. Grave, Moscow, 1940, pp. 72–78.

49. *La geometria de las ecuaciones diferenciales de tercer orden*, Revista Matemática Hispano-Americana vol. 1 (1941) pp. 1–31.

50. *Sur les surfaces admettant une seconde forme fondamentale donnée*, C.R. Acad. Sci. Paris vol. 212 (1941) pp. 825–828.

51. *La notion d'orientation dans les différentes géométries*, Bull. Soc. Math. France vol. 69 (1941) pp. 47–70.

52. *Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales*, Bull. Sci. Math. vol. 66 (1942) pp. 55–72, 74–85.

53. *Notice sur M. Tullio Levi-Civita*, C.R. Acad. Sci. Paris vol. 215 (1942) pp. 233–235.

54. *Les surfaces qui admettent une seconde forme fondamentale donnée*, Bull. Sci. Math. vol. 67 (1943) pp. 8–32.

55. *Sur une classe d'espaces de Weyl*, Ann. École Norm. vol. 60 (1943) pp. 1–16.

56. *Sur une classe de surfaces apparentées aux surfaces R et aux surfaces de Jonas*, Bull. Sci. Math. vol. 68 (1944) pp. 41–50.

57. *Sur un problème de géométrie différentielle projective*, Ann. École Norm. vol. 62 (1945) pp. 205–231.

58. *Quelques remarques sur les 28 bitangentes d'une quartique plane et des 27 droites d'une surface cubique*, Bull. Sci. Math. vol. 70 (1946) pp. 42–45.

59. *L'oeuvre scientifique de M. E. Vessiot*, Bull. Soc. Math. France vol. 75 (1947) pp. 1–8.

60. *Sur l'espace annalagmatique réel à n dimensions*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques vol. 20 (1948) pp. 266–278.